

Groupes d'isométries permutant doublement transitivement un ensemble de droites vectorielles

Lucas Vienne

Département de mathématiques. Université d'Angers. France

Résumé

Soit $n \geq 3$ un entier, et G un groupe fini d'isométries d'un espace euclidien E de dimension finie agissant deux fois transitivement sur un ensemble de droites vectorielles $\mathcal{G} = \{U_1, \dots, U_n\}$. Alors \mathcal{G} est une gerbe équiangulaire de droites, ce qui signifie que, pour $1 \leq i, j \leq n$, il existe des générateurs u_i des droites U_i , une constante c et des coefficients $\varepsilon_{i,j}$ dans $\{-1, +1\}$ tels que

$$\forall i, j, 1 \leq i, j \leq n, \quad \|u_i\| = 1, \text{ et si } i \neq j \text{ alors } (u_i | u_j) = \varepsilon_{i,j} \cdot c$$

On associe à ce système générateur (u_1, \dots, u_n) le graphe simple Γ sur l'ensemble $X = \{1, \dots, n\}$ pour lequel deux points distincts i et j sont liés lorsque $\varepsilon_{i,j} = -1$.

Dans cet article on étudie les propriétés du graphe (Γ, X) impliquées par la double transitivité de G , puis on recherche des graphes remplissant ces conditions et les groupes d'isométries qui leurs sont associés. C'est notamment le cas des graphes de Paley.

Key words: groupe, graphe, graphe fortement régulier, strongly regular graphs, groupe doublement transitif, Paley graphs, equiangular lines

1 Introduction

Soit $n \geq 3$ un entier, E un espace vectoriel réel de dimension finie et G un sous-groupe fini du groupe linéaire $GL(E)$ qui permute deux fois transitivement un ensemble de droites vectorielles $\mathcal{G} = \{U_1, \dots, U_n\}$. On sait qu'il existe un produit scalaire $\varphi = (\cdot | \cdot)$ sur E pour lequel G apparaît comme un sous-groupe d'isométries du groupe orthogonal $O_\varphi(E)$, et la double transitivité de G sur \mathcal{G} nous montre que les droites U_i ($1 \leq i \leq n$) font deux à deux un

Email address: lucas.vienne@univ-angers.fr (Lucas Vienne).

angle constant ; nous dirons que \mathcal{G} est une *gerbe équiangulaire*. Choisisant des générateurs u_i de norme 1 pour chaque droite U_i , il existe une constante c et des coefficients $\varepsilon_{i,j}$ tous pris dans $\{-1, +1\}$ ($1 \leq i, j \leq n$) tels que

$$\forall i, j, 1 \leq i, j \leq n, (u_i | u_i) = 1 \text{ et si } i \neq j, (u_i | u_j) = \varepsilon_{i,j} \cdot c.$$

Chacun des 2^n choix de ces systèmes de générateurs (u_1, \dots, u_n) est associé à un graphe simple Γ sur l'ensemble $X = \{1, \dots, n\}$, deux sommets distincts i et j de X étant liés si et seulement si $\varepsilon_{i,j} = -1$.

Dans la première partie de cet article nous décrivons les propriétés géométriques des graphes Γ impliquées par la double transitivité du groupe G agissant sur la gerbe \mathcal{G} . Ces graphes seront dits *extensibles*.

Dans la deuxième partie on construit des graphes extensibles. On montre notamment que ce sont toujours des graphes fortement réguliers et que les graphes de Paley $P(q)$ sont tous extensibles.

La troisième partie s'appuie sur les résultats d'un article précédent ([5]) pour montrer que toute représentation d'un graphe extensible sur une gerbe équiangulaire est la somme d'une représentation nulle et d'une représentation dite réduite, ces dernières étant naturellement associées aux valeurs propres de la matrice du graphe Γ . On applique ce résultat aux graphes construits dans la deuxième partie pour déterminer les gerbes équiangulaires et les groupes d'isométries qui leurs sont associés.

2 Résultats préliminaires

Un entier $n \geq 3$ étant choisi, la matrice $\mathcal{E} = (\varepsilon_{i,j})$ d'un graphe simple Γ sur l'ensemble $X = \{1, \dots, n\}$ est donnée par son (i, j) -ème coefficient $\varepsilon_{i,j}$ qui vaut -1 si i et j sont liés (noté $i \sim j$) et 1 dans le cas contraire.

Donnons nous un espace quadratique (E, α) c'est-à-dire un espace vectoriel réel E de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique α . Une représentation de (Γ, X) dans (E, α) est une application u de X dans E notée $u : i \rightarrow u_i$ telle que pour deux constantes (ω, c) on ait

$$(1) \quad \forall i, j \in X, \alpha(u_i, u_i) = \omega \text{ et si } i \neq j, \alpha(u_i, u_j) = \varepsilon_{i,j} \cdot c.$$

On dit que ω et c sont les *paramètres* de u et que la matrice notée $S_\Gamma(u)$ ou plus simplement $S(u)$ de coefficient général $\alpha(u_i, u_j)$ ($i, j \in X$) est la *matrice de la représentation* u . Comme elle ne dépend que de Γ et des paramètres ω et c , on la note aussi $S(\omega, c)$; remarquons que $\mathcal{E} = S(1, 1)$. On appelle respectivement *rang* et *degré* de u le rang de $S(u)$ et la dimension de E . Enfin l'ensemble $\mathcal{G}(u)$ des droites vectorielles engendrées par les vecteurs u_i ($i \in X$) s'appelle la gerbe *équiangulaire* ou *isométrique* associée à u . On dira aussi que le graphe Γ est représenté sur la gerbe $\mathcal{G}(u)$.

2.1 Matrices et graphes associés

Sauf indication contraire, le (i, j) -ème coefficient d'une matrice M est noté $M_{i,j}$. Pour tout σ dans le groupe \mathcal{S}_X des permutations de X , notons P_σ sa matrice, dont le (i, j) -ème coefficient vaut $P_{\sigma,i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$ (où δ est le symbole de Kronecker usuel), et pour toute matrice M de type $n \times n$ posons ${}^\sigma M = P_\sigma.M.P_\sigma^{-1}$, de sorte que pour deux indices i, j arbitraires dans X on a ${}^\sigma M_{i,j} = M_{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(j)}$. En remarquant que pour deux permutations σ et δ de X on a ${}^{\sigma\delta} M = {}^\sigma({}^\delta M)$, on voit que l'ensemble des permutations σ de X telles que ${}^\sigma M = M$ est un sous-groupe de \mathcal{S}_X dit *stabilisateur* de M et noté $\text{stab}(M)$. De plus ${}^\sigma \mathcal{E}$ est la matrice du graphe ${}^\sigma \Gamma$, image de Γ par la permutation σ qui est donc dans le groupe $\text{Aut}(\Gamma)$ des automorphismes du graphe Γ si et seulement si ${}^\sigma \mathcal{E} = \mathcal{E}$. Autrement dit, $\text{stab}(\mathcal{E}) = \text{Aut}(\Gamma)$.

Soient (Γ, X) un graphe représenté par une gerbe isométrique $\mathcal{G} = \{U_i \mid i \in X\}$ dans un espace quadratique (E, α) , et des générateurs u_i des droites U_i (pour $i \in X$) satisfaisant à la condition (1). Choisisant une suite (ν_1, \dots, ν_n) de coefficients dans $\{-1, 1\}$, les générateurs $u'_i = \nu_i u_i$ des droites U_i ($i \in X$) satisfont encore à la condition (1) si l'on remplace la matrice $\mathcal{E} = (\varepsilon_{i,j})$ par la matrice $\mathcal{E}' = (\varepsilon'_{i,j})$ dont le (i, j) -ème coefficient vaut $\varepsilon'_{i,j} = \nu_i \nu_j \varepsilon_{i,j}$. Ce changement de générateurs induit aussi une modification du graphe Γ associé à la gerbe \mathcal{G} qui doit être remplacé par le graphe Γ' de matrice \mathcal{E}' . Cette réflexion nous conduit à la

Définition 1

Soient Γ et Γ' deux graphes sur le même ensemble X de sommets, de matrices respectives $\mathcal{E} = (\varepsilon_{i,j})$ et $\mathcal{E}' = (\varepsilon'_{i,j})$. On dit que les matrices \mathcal{E} et \mathcal{E}' , ou les graphes Γ et Γ' , sont associés s'il existe une suite (ν_1, \dots, ν_n) de coefficients, tous pris dans $\{-1, 1\}$ tels que

$$(2) \quad \forall (i, j) \in X \times X, \quad \varepsilon'_{i,j} = \nu_i \nu_j \varepsilon_{i,j}$$

La proposition suivante nous donne quelques informations sur cette relation.

Proposition 1

1. La relation d'association entre graphes ou matrices est une relation d'équivalence.
2. L'ensemble $G(\mathcal{E}) = G(\Gamma)$ des permutations σ de X telles que les matrices \mathcal{E} et ${}^\sigma \mathcal{E}$, ou les graphes Γ et ${}^\sigma \Gamma$, soient associés est un sous-groupe de \mathcal{S}_X contenant le groupe $\text{stab}(\mathcal{E}) = \text{Aut}(\Gamma)$.
3. Si deux graphes (Γ, X) et (Γ', X) de matrices respectives \mathcal{E} et \mathcal{E}' sont associés, les groupes $G(\mathcal{E})$ et $G(\mathcal{E}')$ sont égaux.

Démonstration. Le point 1 est immédiat. Les points 2 et 3 se montrent facilement en remarquant que, pour σ dans \mathcal{S}_X , les matrices \mathcal{E} et ${}^\sigma \mathcal{E}$ sont associées si et seulement si il existe une suite (ν_1, \dots, ν_n) de coefficients, tous pris dans

$\{-1, 1\}$ tels que

$$(3) \quad \forall (i, j) \in X \times X, \quad \varepsilon_{\sigma(i), \sigma(j)} = \nu_i \nu_j \cdot \varepsilon_{i, j} \quad \square$$

Notation : Lorsque le graphe Γ ou sa matrice \mathcal{E} sont déterminés sans ambiguïté on notera plus simplement G le groupe $G(\mathcal{E}) = G(\Gamma)$.

2.2 Localisation

Certains graphes associés à (Γ, X) vont jouer un rôle important.

Proposition 2 (et définition de la localisation)

Soit (Γ, X) un graphe de matrice \mathcal{E} , et j un point de X .

1. Il existe une unique matrice $\mathcal{E}' = (\varepsilon'_{k,l})$ associée à \mathcal{E} telle que pour tout k dans X , $\varepsilon'_{k,j} = 1$. On a

$$\forall k, l \in X, \quad \varepsilon'_{k,l} = \nu_k \nu_l \cdot \varepsilon_{k,l} \quad \text{où} \quad \nu_k = \varepsilon_{k,j} \quad \text{si} \quad k \neq j \quad \text{et} \quad \nu_j = 1.$$

2. Il existe un unique graphe Γ' associé à Γ tel que j soit un point isolé de Γ' , c'est-à-dire qu'aucune arête de Γ' ne contient j .

Nous dirons que \mathcal{E}' est la matrice localisée de \mathcal{E} en j et la noterons $\mathcal{E}' = {}^j\mathcal{E}$.

De même Γ' est le graphe localisé de Γ en j et on le note $\Gamma' = {}^j\Gamma$.

Démonstration. Bien entendu la deuxième affirmation n'est que la traduction de la première dans le langage des graphes. Montrons donc la première. Posons pour tout indice k dans X ,

$$\nu_k = \varepsilon_{j,k} \quad \text{si} \quad k \neq j \quad \text{et} \quad \nu_j = 1,$$

puis pour deux indices arbitraires k, l dans X ,

$$\varepsilon'_{k,l} = \nu_k \cdot \nu_l \cdot \varepsilon_{k,l}.$$

La matrice $\mathcal{E}' = (\varepsilon'_{k,l})$ est associée à \mathcal{E} et satisfait à $\varepsilon'_{j,k} = \nu_j \cdot \nu_k \cdot \varepsilon_{j,k} = \varepsilon_{j,k}^2 = 1$, pour tout k dans X ; elle répond donc à la question. Si $\mathcal{E}'' = (\varepsilon''_{k,l})$ est une deuxième solution de coefficient général $\varepsilon''_{k,l} = \mu_k \cdot \mu_l \cdot \varepsilon_{k,l}$, où les μ_k sont pris dans $\{-1, 1\}$, il vient, pour deux indices k, l dans X ,

$$\varepsilon_{k,l} = \nu_k \cdot \nu_l \cdot \varepsilon'_{k,l} = \mu_k \cdot \mu_l \cdot \varepsilon''_{k,l} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{k,j} = \nu_k \cdot \nu_j = \mu_k \cdot \mu_j,$$

$$\text{donc} \quad \varepsilon_{k,j} \cdot \varepsilon_{l,j} = \nu_k \cdot \nu_j \cdot \nu_l \cdot \nu_j = \mu_k \cdot \mu_j \cdot \mu_l \cdot \mu_j \quad \text{puis} \quad \nu_k \cdot \nu_l = \mu_k \cdot \mu_l,$$

$$\text{d'où l'on tire} \quad \varepsilon'_{k,l} = \varepsilon''_{k,l} \quad \text{et enfin} \quad \mathcal{E}' = \mathcal{E}''. \quad \square$$

Rassemblons quelques propriétés de la localisation.

Proposition 3

Soient Γ et Γ' deux graphes sur X de matrices respectives \mathcal{E} et \mathcal{E}' .

1. Pour deux indices j, k dans X , on a ${}^k\mathcal{E} = {}^k({}^j\mathcal{E})$, que l'on note plus simplement ${}^{kj}\mathcal{E}$.

2. Les matrices \mathcal{E} et \mathcal{E}' sont associées si et seulement si il existe un indice k dans X tel que ${}^k\mathcal{E} = {}^k\mathcal{E}'$ et dans ce cas l'égalité ${}^j\mathcal{E} = {}^j\mathcal{E}'$ a lieu pour tous les indices j de X .

3. Pour toute permutation σ de X , on a les équivalences entre :

(a) Les matrices \mathcal{E} et ${}^\sigma\mathcal{E}$ sont associées.

(b) Pour tout indice j dans X on a ${}^\sigma({}^j\mathcal{E}) = {}^{\sigma(j)}\mathcal{E}$.

(c) Il existe un indice k dans X tel que ${}^\sigma({}^k\mathcal{E}) = {}^{\sigma(k)}\mathcal{E}$.

Démonstration

1. Les matrices \mathcal{E} , ${}^k\mathcal{E}$ et ${}^k({}^j\mathcal{E})$ sont associées et la k -ème colonne de ${}^k({}^j\mathcal{E})$ ne contient que le nombre 1. Or, d'après la proposition 2, cette propriété caractérise la matrice ${}^k\mathcal{E}$. Donc ${}^k\mathcal{E} = {}^k({}^j\mathcal{E})$.

2. Si \mathcal{E} et \mathcal{E}' sont associées, alors ${}^k\mathcal{E}$ et ${}^k\mathcal{E}'$ le sont aussi mais de plus, leur k -ème colonne ne contenant que des 1, elles sont égales d'après la proposition 2. Inversement si ${}^k\mathcal{E} = {}^k\mathcal{E}'$ alors par transitivité on voit que \mathcal{E}' est associée à \mathcal{E} . Dans ce cas on obtient pour tout indice j dans X ,

$${}^j\mathcal{E} = {}^{jk}\mathcal{E} = {}^{jk}\mathcal{E}' = {}^j\mathcal{E}'.$$

3. Tout d'abord la définition 1 nous montre que, pour toute permutation σ de X , si les matrices \mathcal{E} et \mathcal{E}' sont associées alors ${}^\sigma\mathcal{E}$ et ${}^\sigma\mathcal{E}'$ le sont aussi.

Partant de l'hypothèse (a), comme pour chaque indice j dans X , \mathcal{E} et ${}^j\mathcal{E}$ sont associées, on en déduit que \mathcal{E} , ${}^\sigma\mathcal{E}$ et ${}^\sigma({}^j\mathcal{E})$ sont associées, or

$$\forall i \in X, \quad {}^\sigma({}^j\mathcal{E})_{\sigma(j),i} = {}^j\mathcal{E}_{\sigma^{-1}\sigma(j),\sigma^{-1}(i)} = {}^j\mathcal{E}_{j,\sigma^{-1}(i)} = 1,$$

donc ${}^\sigma({}^j\mathcal{E})$ est l'unique matrice associée à \mathcal{E} dont la $\sigma(j)$ -ème colonne ne contient que des 1, c'est-à-dire ${}^\sigma({}^j\mathcal{E}) = {}^{\sigma(j)}\mathcal{E}$, ce qui prouve (b).

Bien entendu (b) implique (c).

Supposons enfin que, pour un indice k , on ait ${}^\sigma({}^k\mathcal{E}) = {}^{\sigma(k)}\mathcal{E}$. Alors comme \mathcal{E} , ${}^k\mathcal{E}$ et ${}^{\sigma(k)}\mathcal{E}$ sont associées, ${}^\sigma\mathcal{E}$ est associée à ${}^\sigma({}^k\mathcal{E}) = {}^{\sigma(k)}\mathcal{E}$, et par transitivité \mathcal{E} et ${}^\sigma\mathcal{E}$ sont associées. Donc (c) implique (a). \square

Remarque : en utilisant la correspondance naturelle entre les graphes et leurs matrices on obtient une adaptation immédiate de cette proposition en terme de graphes que nous laissons au lecteur.

Nous allons maintenant interpréter géométriquement l'incidence de la localisation sur un graphe, c'est à dire comparer, pour deux points x et y de X , les graphes localisés ${}^x\Gamma$ et ${}^y\Gamma$.

Introduisons une notation : si x est un point d'un graphe (Γ, X) et d un entier positif, on note $\Gamma(x, d)$ l'ensemble des points de X qui sont à distance d de x , et $\Gamma(x, d^+)$ l'ensemble de ceux qui sont à une distance supérieure ou égale à d .

Lemme 1

Soient x et y deux sommets distincts d'un graphe (Γ, X) de matrice \mathcal{E} . Notons ${}^x\mathcal{E}$ et ${}^y\mathcal{E}$ les matrices des localisés ${}^x\Gamma$ et ${}^y\Gamma$ du graphe Γ en x et y .

1.a. Il existe une suite de coefficients ν_k ($k \in X$), tous dans $\{-1, 1\}$, tels que

$\forall k, l \in X, {}^x\mathcal{E}_{k,l} = \nu_k \nu_l \cdot {}^y\mathcal{E}_{k,l},$ où $\nu_k = -1 \Leftrightarrow k \in {}^y\Gamma(x, 1) \Leftrightarrow k \in {}^x\Gamma(y, 1)$

1.b. On a ${}^y\Gamma(x, 1) = {}^x\Gamma(y, 1)$ et les graphes induits par ${}^x\Gamma$ et ${}^y\Gamma$ sur cet ensemble sont égaux.

2. Soit $\{k, l\}$ une paire de points dans X . La nature de la liaison entre k et l (arête ou non) est identique dans les graphes ${}^x\Gamma$ et ${}^y\Gamma$ si et seulement si le cardinal de $\{k, l\} \cap {}^y\Gamma(x, 1)$ est pair.

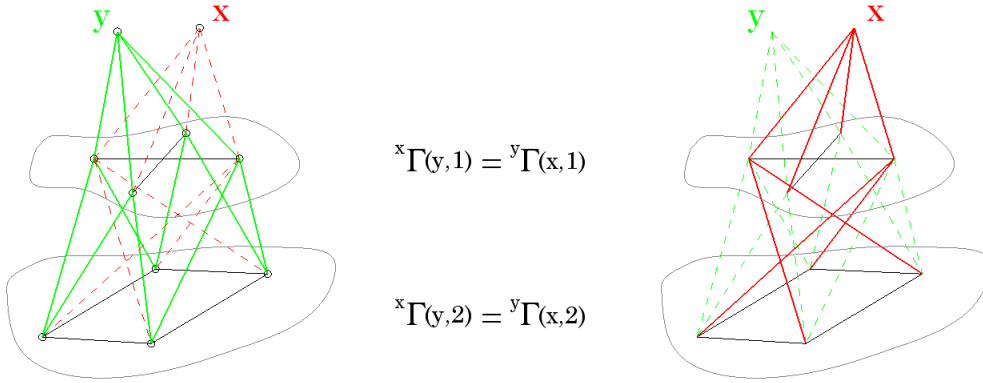
Démonstration

1a. Comme la matrice ${}^x\mathcal{E}$ est la localisée en x de ${}^y\mathcal{E}$ (car ${}^x\mathcal{E} = {}^{xy}\mathcal{E}$ d'après la proposition 3), la proposition 2 nous montre que les matrices ${}^x\mathcal{E}$ et ${}^y\mathcal{E}$ sont liées par les relations

$$\forall k, l \in X, {}^x\mathcal{E}_{k,l} = \nu_k \nu_l \cdot {}^y\mathcal{E}_{k,l}, \text{ où } \nu_k = {}^y\mathcal{E}_{k,x} \text{ si } k \neq x \text{ et } \nu_x = 1$$

On en déduit que $\nu_k = -1$ si et seulement si $\{k, x\}$ est une arête de ${}^y\Gamma$, autrement dit si $k \in {}^y\Gamma(x, 1)$. Or l'égalité ${}^x\mathcal{E}_{k,l} = \nu_k \nu_l \cdot {}^y\mathcal{E}_{k,l}$ est symétrique en x et y (${}^y\mathcal{E}_{k,l} = \nu_k \nu_l \cdot {}^x\mathcal{E}_{k,l}$ est obtenue en multipliant ses deux membres par $\nu_k \nu_l$), donc $\nu_k = {}^y\mathcal{E}_{k,x} = {}^x\mathcal{E}_{k,y}$, ce qui montre que $\{k, x\}$ est une arête de ${}^y\Gamma$ si et seulement si $\{k, y\}$ est une arête de ${}^x\Gamma$, autrement dit ${}^y\Gamma(x, 1) = {}^x\Gamma(y, 1)$, et ceci prouve 1.a.

Revenons à l'interprétation géométrique de l'égalité ${}^x\mathcal{E}_{k,l} = \nu_k \nu_l \cdot {}^y\mathcal{E}_{k,l}$. Elle signifie que la liaison entre les points k et l (arête ou non-arête) est de même nature dans les graphes localisés ${}^x\Gamma$ et ${}^y\Gamma$ si et seulement si le produit $\nu_k \nu_l$ vaut 1. On en déduit immédiatement 1.b. en choisissant k et l dans ${}^y\Gamma(x, 1) = {}^x\Gamma(y, 1)$ et plus généralement 2, en prenant pour $\{k, l\}$ une paire arbitraire de points dans X . \square



Les graphes ${}^x\Gamma$ et ${}^y\Gamma$

2.3 Le problème de la transitivité

Un graphe (Γ, X) de matrice \mathcal{E} étant donné, la proposition suivante précise à quelles conditions le groupe $G = G(\mathcal{E})$ opère transitivement ou doublement transitivement sur X .

Proposition 4

1. Le groupe G opère transitivement sur X si et seulement si les localisés ${}^x\Gamma$ de Γ , pour x variant dans X , sont deux à deux isomorphes.
2. S'il opère doublement transitivement sur X , le groupe d'automorphismes $\text{Aut}({}^x\Gamma)$ de l'un d'eux opère transitivement sur l'ensemble $X^x = X - \{x\}$.
3. Si pour deux points x et y de X distincts les groupes d'automorphismes $\text{Aut}({}^x\Gamma)$ et $\text{Aut}({}^y\Gamma)$ opèrent transitivement, respectivement sur $X^x = X - \{x\}$ et $X^y = X - \{y\}$ alors le groupe G opère doublement transitivement sur X .

Démonstration . Les points 1 et 2 sont clairs car pour toute permutation σ dans le groupe G on a $\sigma({}^x\mathcal{E}) = {}^{\sigma(x)}\mathcal{E}$ et $\sigma({}^x\Gamma) = {}^{\sigma(x)}\Gamma$ d'après la proposition 3.

3. Sous l'hypothèse faite, on voit que $X - \{x\}$ et $X - \{y\}$ sont respectivement des orbites sur X des sous-groupes $\text{Aut}({}^x\Gamma)$ et $\text{Aut}({}^y\Gamma)$ de G . Mais l'intersection $(X - \{x\}) \cap (X - \{y\})$ n'est pas vide puisque $|X| = n \geq 3$, donc le groupe G possède une orbite sur X contenant la réunion $(X - \{x\}) \cup (X - \{y\})$ qui n'est autre que X ; il est donc transitif sur X et comme le sous-groupe $\text{Aut}({}^x\Gamma)$ de G agit transitivement sur $X - \{x\}$, on en déduit que G agit deux fois transitivement sur X comme voulu. \square

Cette proposition nous conduit à étudier les graphes satisfaisant aux deux conditions suivantes :

- C1. Les localisés de Γ en deux points quelconques de X sont isomorphes.
- C2. Pour un point x de X , le groupe d'automorphismes $\text{Aut}({}^x\Gamma)$ du graphe ${}^x\Gamma$ opère transitivement sur l'ensemble $X^x = X - \{x\}$.

Notations : un point x de X étant donné, on note Γ^x le graphe induit par ${}^x\Gamma$ sur l'ensemble $X^x = X - \{x\}$. Le graphe Γ^x ne diffère donc de ${}^x\Gamma$ que par la suppression du point isolé x .

Théorème 1

Soit (Γ, X) un graphe simple satisfaisant aux conditions C1 et C2.

1. Le groupe G opère deux fois transitivement sur X .
2. Pour tout point x de X le diamètre du graphe (Γ^x, X^x) est au plus 2, et s'il vaut 1, Γ^x est le graphe complet sur l'ensemble X^x et $G(\Gamma) = \mathcal{S}_X$.
3. Soient x et y deux sommets distincts de (Γ, X)
 - 3.a. Les ensembles $\Gamma^x(y, 1)$ et $\Gamma^y(x, 1)$ sont égaux, de cardinal pair, $2s$.
 - 3.b. Les ensembles $\Gamma^x(y, 2)$ et $\Gamma^y(x, 2)$ sont égaux, de cardinal pair, $2\bar{s}$.
 - 3.c. Tout point de $\Gamma^x(y, 1)$ est lié à \bar{s} points de $\Gamma^x(y, 2)$ et à $t = 2s - \bar{s} - 1$ points de $\Gamma^x(y, 1)$.
 - 3.d. Tout point de $\Gamma^x(y, 2)$ est lié à s points de $\Gamma^x(y, 2)$ et à s points de $\Gamma^x(y, 1)$.
4. Toute arête de (Γ^x, X^x) est contenue dans exactement $t = 2s - \bar{s} - 1$ triangles.
5. On a $|X| = n = 2 + 2s + 2\bar{s}$.

Démonstration :

1. Tout d'abord les conditions $C1$ et $C2$ nous montrent que les actions des groupes $\text{Aut}(^x\Gamma)$ et $\text{Aut}(^y\Gamma)$ sur les ensembles $X^x = X - \{x\}$ et $X^y = X - \{y\}$ sont transitives. Par la proposition 4 on en déduit que le groupe G opère deux fois transitivement sur X . Donc les cardinaux des ensembles $\Gamma^x(y, 1)$, $\Gamma^x(y, 2)$ et $\Gamma^x(y, 2^+)$ ne dépendent pas du choix des sommets x et y pourvu qu'ils soient distincts.

2. Dire que le diamètre du graphe (Γ^x, X^x) est 1 équivaut à dire que c'est le graphe complet sur X^x et l'égalité $G(\Gamma) = \mathcal{S}_X$ en découle immédiatement.

Comme le graphe Γ^x ne diffère de $^x\Gamma$ que par la suppression du point isolé x l'égalité $\Gamma^x(y, 1) = \Gamma^y(x, 1)$ vient simplement du lemme 1 (1.b).

Supposons que le diamètre de (Γ^x, X^x) est au moins 2, et choisissons un point z_2 dans $\Gamma^x(y, 2^+)$ et un point z dans X . Comme x est isolé dans $^x\Gamma$, on a $\Gamma^x(y, 1) = ^x\Gamma(y, 1)$ et le lemme 1 nous montre que si z n'est pas dans $\Gamma^x(y, 1)$ la liaison entre z et z_2 est identique dans les graphes $^x\Gamma$ et $^y\Gamma$, tandis que si z est dans $\Gamma^x(y, 1) = \Gamma^y(x, 1)$ (représenté par z' sur la figure A) alors $\{z_2, z\}$ est une arête de Γ^x si et seulement si c'est une non-arête de Γ^y . Or la double transitivité du groupe G agissant sur X montre que le nombre d'arêtes issues de z_2 doit être le même dans les graphes Γ^x et Γ^y . On en déduit donc que le nombre d'éléments de $\Gamma^x(y, 1)$ est un nombre pair, $2s$, et que z_2 est lié à exactement s d'entre eux dans le graphe Γ^x . Mais on en déduit aussi que z_2 est à distance 2 de y dans le graphe Γ^x , donc les graphes Γ^x et Γ^y sont de diamètre 2 et les ensembles $\Gamma^x(y, 2)$ et $\Gamma^y(x, 2)$ sont égaux car ils sont le complémentaire commun dans X de $\{x, y\} \cup \Gamma^x(y, 1)$. De plus les s sommets de Γ^x qui sont liés à z_2 mais pas dans $\Gamma^x(y, 1)$ sont nécessairement dans $\Gamma^x(y, 2)$. Ceci achève la preuve de 2, 3.a et 3.d.

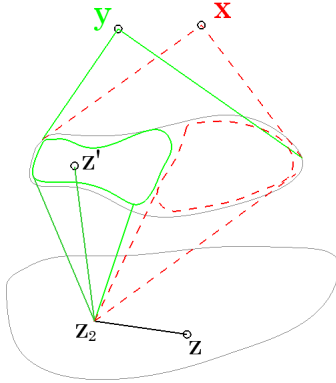


figure A

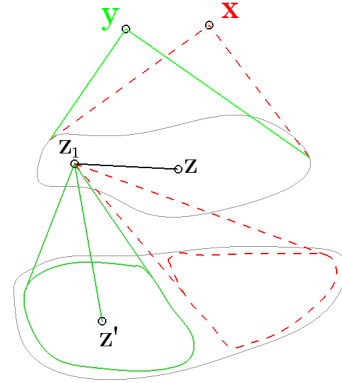


figure B

Choisissons maintenant un point z_1 dans $\Gamma^x(y, 1)$ et un point z dans X . En raisonnant de façon analogue, on voit que les liaisons entre z_1 et z sont de même nature dans les graphes $^x\Gamma$ et $^y\Gamma$ si z est dans $\Gamma^x(y, 1)$, et de nature contraire si z est dans $\{x, y\} \cup \Gamma^x(y, 2)$ (représenté par z' sur la figure B), donc le nombre d'éléments de $\Gamma^y(x, 2) = \Gamma^x(y, 2)$ est un nombre pair, $2\bar{s}$, et le

sommet z_1 est lié à exactement \bar{s} d'entre eux dans dans le graphe Γ^x . Tenant compte du fait que z_1 est lié à y , on en déduit, par soustraction que z_1 est lié à exactement $t = 2s - \bar{s} - 1$ points de $\Gamma^x(y, 1)$, ce qui achève la preuve de 3. Enfin ce nombre $t = 2s - \bar{s} - 1$ est aussi le nombre de triangles dont $\{y, z_1\}$ est une arête, et ceci prouve 4.

5. C'est une simple addition puisque $X = \{x, y\} \cup \Gamma^x(y, 1) \cup \Gamma^x(y, 2)$. \square

Avant de passer à la construction de graphes satisfaisants aux conditions du théorème 1, prenons un instant pour nous accorder avec les notations usuelles. Un graphe simple (Λ, Y) est dit *fortement régulier* lorsqu'il possède les trois propriétés suivantes :

- * Chaque sommet de Λ est lié à exactement k sommets de Λ .
- * Chaque arête est contenue dans exactement λ triangles.
- * Deux points non liés sont simultanément liés à μ sommets.

On note souvent v le cardinal de Y et on dit que le graphe (Λ, Y) est de type (v, k, λ, μ) . Les paramètres d'un tel graphe ne sont pas totalement indépendants puisqu'il vérifient la relation $(v - k - 1)\mu = k(k - \lambda - 1)$. Il est facile de vérifier que les conditions imposées par le théorème 1 au graphe (Γ^x, X^x) en font un graphe fortement régulier avec les paramètres $(v, k, \lambda, \mu) = (n - 1, 2s, t, s)$, et l'égalité $(v - k - 1)\mu = k(k - \lambda - 1)$ se traduit alors par $n = 2 + 2s + 2\bar{s}$.

Pour des raisons essentiellement typographiques (les lettres v, k, λ , et μ sont bien utiles) nous gardons dans la suite les paramètres n, t, s et \bar{s} pour décrire le graphe (Γ, X) .

3 Constructions de graphes

Fixons quelques notations.

Dans cette partie, un point x de X étant donné, on renomme (Λ, Y) le graphe (Γ^x, X^x) et on suppose qu'il satisfait aux conditions 3, 4 et 5 du théorème 1 :

1. Le graphe (Λ, Y) est diamètre 2.
2. Pour tout point y de Y ,
 - 2.a. L'ensemble $\Lambda(y, 1)$ des points liés à y est de cardinal pair $2s$.
 - 2.b. L'ensemble $\Lambda(y, 2)$ des points à distance 2 de y est de cardinal pair $2\bar{s}$.
 - 2.c. Tout point z de $\Lambda(y, 1)$ est lié à \bar{s} points de $\Lambda(y, 2)$ et à $t = 2s - \bar{s} - 1$ points de $\Lambda(y, 1)$.
 - 2.d. Tout point z de $\Lambda(y, 2)$ est lié à s points de $\Lambda(y, 2)$ et à s points de $\Lambda(y, 1)$.
3. Chaque arête du graphe (Λ, Y) est contenue dans exactement $t = 2s - \bar{s} - 1$ triangles.
4. On a $|Y| = 1 + 2s + 2\bar{s}$.

Nous dirons qu'un graphe (Λ, Y) satisfaisant à ces quatre propriétés est *extensible* et que les constantes (t, s, \bar{s}) sont ses *paramètres*. Lorsqu'aucune ambiguïté n'est possible concernant le point y de Y , on notera (Λ_1, Y_1) et (Λ_2, Y_2)

les graphes induits par (Λ, Y) sur les ensembles $Y_1 = \Lambda(y, 1)$ et $Y_2 = \Lambda(y, 2)$, c'est-à-dire les graphes dont les arêtes sont celles de (Λ, Y) qui sont contenues dans Y_1 , ou Y_2 .

Remarquons que la connaissance du graphe $(\Lambda, Y) = (\Gamma^x, X^x)$ détermine, à isomorphisme près, pour tout y dans X , le graphe (Γ^y, X^y) , puisque ${}^y\Gamma = {}^x\Gamma$. Plus précisément on a

Proposition 5

Si pour un point x de X le graphe (Γ^x, X^x) est extensible, alors le graphe (Γ^y, X^y) l'est pour tout y dans X , et les paramètres des graphes (Γ^x, X^x) et (Γ^y, X^y) sont égaux.

Démonstration. Simple décompte. □

3.1 Le graphe complémentaire

On appelle *complémentaire* d'un graphe (Λ, Y) le graphe $(\overline{\Lambda}, Y)$ admettant le même ensemble de sommets Y que (Λ, Y) et dont les arêtes sont les non-arêtes de (Λ, Y) .

Proposition 6

Si (Λ, Y) est un graphe extensible, son graphe complémentaire $(\overline{\Lambda}, Y)$ l'est aussi et ses paramètres $(\overline{t}, s', \overline{s'})$ sont liés aux paramètres (t, s, \overline{s}) de (Λ, Y) par

$$s' = \overline{s}, \quad \overline{s'} = s, \quad t + \overline{t} = s + \overline{s} - 2 = s' + \overline{s'} - 2$$

Cette proposition, qui se montre très simplement, nous permet de limiter notre recherche aux cas où $t \leq \overline{t}$, ce qui équivaut à $2t \leq s + \overline{s} - 2$.

On aborde maintenant la recherche des graphes extensibles (Λ, Y) de paramètres (t, s, \overline{s}) . On organise la discussion en fonction du paramètre t qui nous donne le nombre de triangles incidents à une arête donnée. Nous regardons tout d'abord les cas $t = 0$ et $t = 1$. Ensuite on verra que les graphes de Paley $P(q)$ forme une famille infinie de solutions admettent un système de paramètres de la forme $(t, s, \overline{s}) = (t, t + 1, t + 1)$ où $q = 4t + 5$.

3.2 $t = 0$

Théorème 2

1. *Si $t = 0$, le graphe (Λ, Y) existe uniquement si $(t, s, \overline{s}) = (0, 1, 1)$. C'est un pentagone.*
2. *Son groupe d'automorphismes $\text{Aut}(\Lambda)$ est le groupe diédral D_5 , dont l'ex-*

tension $G(\Gamma)$ est un groupe opérant doublement transitivement sur l'ensemble $X = Y \cup \{x\}$, semblable à la représentation doublement transitive du groupe alterné A_5 sur un ensemble de cardinal 6.

Démonstration

1. Il est clair qu'un pentagone est un graphe extensible de paramètre $t = 0$. Inversement si (Λ, Y) est extensible et $t = 0$, choisissons un point y dans Y et un point z dans $Y_2 = \Lambda(y, 2)$ qui est donc lié à $2s$ points de Y dont s sont dans $Y_1 = \Lambda(y, 1)$ et les autres dans Y_2 . Comme (Λ, Y) ne contient aucun triangle chaque point z_2 de $\Lambda(z, 1) \cap Y_2$ est lié à s points dans Y_1 (propriété 2d des graphes extensibles) qui sont tous dans le complémentaire C de $\Lambda(z, 1) \cap Y_1$ dans Y_1 . Or, d'après la condition 2d, $|\Lambda(z, 1) \cap Y_1| = |C| = s$, donc inversement chaque point de C est lié aux s points de $\Lambda(z, 1) \cap Y_2$. Supposons que $s > 1$. On peut alors choisir deux points distincts y_1 et z_1 dans C liés à y et aux s points de $\Lambda(z, 1) \cap Y_2$. Il vient donc $|\Lambda(y_1, 1) \cap \Lambda(z_1, 1)| \geq s + 1$, ce qui contredit la condition 2d. Donc, par l'absurde, $s = 1$, $\bar{s} = 1$ et le graphe (Λ, Y) est un pentagone.
2. Revenons au graphe (Γ, X) pour lequel $(\Gamma^x, X^x) = (\Lambda, Y)$. D'après la proposition 5, pour tout y dans X , le graphe (Γ^y, X^y) est extensible, de mêmes paramètres que (Γ^x, X^x) , et l'unicité de la construction ci-dessus nous montre qu'il s'agit aussi d'un pentagone. Le groupe $G(\Gamma)$ opère donc transitivement sur X et le stabilisateur d'un point x de X est semblable, dans son action sur X^x au groupe diédral D_5 . \square

3.3 $t = 1$

Nous allons montrer que lorsque le paramètre t vaut 1, il existe, à isomorphisme près, quatre graphes extensibles (Λ, Y) dont les paramètres sont

$$(1, 1, 0), \quad (1, 2, 2), \quad (1, 3, 4), \quad (1, 5, 8)$$

Comme précédemment on choisit un sommet y dans Y et on note (Λ_1, Y_1) et (Λ_2, Y_2) , les graphes induits par (Λ, Y) sur $Y_1 = \Lambda(y, 1)$ et $Y_2 = \Lambda(y, 2)$.

Proposition 7 *Pour des indices i et j entre 1 et s on a :*

- (1) *Le graphe (Λ_1, Y_1) dessine sur Y_1 une partition par s arêtes, qu'on notera*

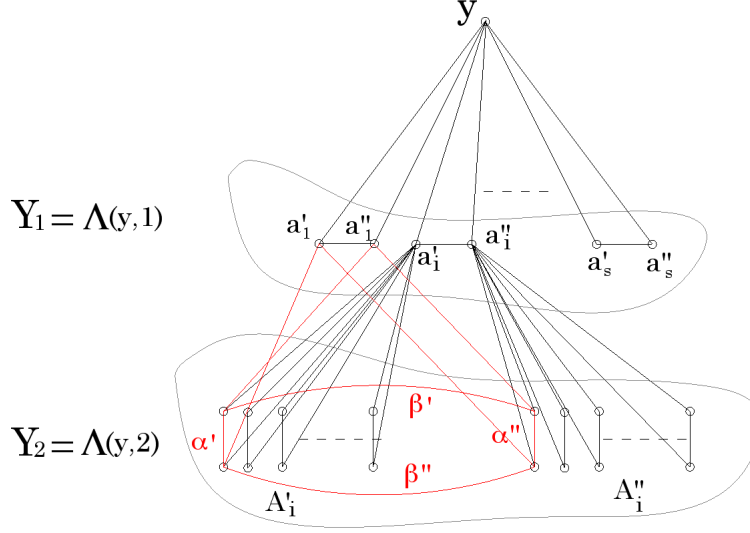
$$\alpha_1 = \{a'_1, a''_1\}, \dots, \alpha_s = \{a'_s, a''_s\}.$$

- (2) *Notant A'_i (resp. A''_i) l'ensemble des points de Y_2 liés à a'_i (resp. a''_i), pour chaque indice i , $\{A'_i, A''_i\}$ est une partition de Y_2 en deux sous-ensembles de cardinal $\bar{s} = 2(s - 1)$.*

- (3) *Le graphe (Λ_2, Y_2) ne contient aucun triangle.*

- (4) *Toute arête de (Λ_2, Y_2) est contenue dans exactement un ensemble parmi $A'_1, A''_1, \dots, A'_s, A''_s$, et le graphe (Λ_2, Y_2) induit sur chacun d'eux une partition par $s - 1$ arêtes.*

(5) Si α' et α'' sont deux arêtes du graphe (Λ_2, Y_2) choisies respectivement dans A'_i et A''_i , il existe des arêtes β' et β'' du graphe (Λ_2, Y_2) , uniquement déterminées telles que α' , α'' , β' et β'' forment un carré. De plus il existe un unique indice j tel que β' et β'' soient respectivement contenues dans A'_j et A''_j .



Représentation symbolique de la proposition 7

Démonstration

(1) Comme $t = 1$, l'ensemble des triangles de sommet y dessine sur Y_1 une partition par s arêtes, que l'on note $\alpha_1 = \{a'_1, a''_1\}, \dots, \alpha_s = \{a'_s, a''_s\}$.

(2) Chacun des sommets a'_i (resp. a''_i) est donc lié à un ensemble A'_i (resp. A''_i) de $2s - 2$ points dans Y_2 . La condition $t = 1$ nous montre que pour chaque indice i l'intersection $A'_i \cap A''_i$ est vide et donc $\{A'_i, A''_i\}$ est une partition de Y_2 .

(3) S'il existait un triangle T dans Y_2 , une de ses arêtes serait contenue dans l'un des ensembles A'_1 ou A''_1 et serait donc commune à deux triangles (T et un triangle de sommet a'_1 ou a''_1), ce qui contredirait la condition $t = 1$. Ceci prouve (3).

(4) La condition $t = 1$ nous montre aussi que, pour chaque indice i , l'ensemble des traces sur Y_2 des triangles de sommet a'_i (resp. a''_i) dessine sur A'_i (resp. A''_i) une partition par $s - 1$ arêtes. Inversement toute arête contenue dans Y_2 est contenue dans un unique triangle dont le troisième sommet est nécessairement l'un des a'_i ou des a''_i . Donc cette arête est contenue dans A'_i ou A''_i .

(5) Soient u et v les deux sommets de l'arête α' et $\beta_j = \{u, u_j\}$ la liste des $s - 1$ arêtes d'origine u ($1 \leq j \leq s - 1$), contenues dans Y_2 et distinctes de α' . Comme, d'après (4), aucune d'elle ne peut être contenue dans A'_i , leurs extrémités u_1, \dots, u_{s-1} sont toutes contenues dans A''_i . Mais comme Y_2 ne contient aucun triangle l'ensemble $\{u_1, \dots, u_{s-1}\}$ ne contient aucune arête. Donc chacune des $s - 1$ arêtes contenue dans A''_i contient exactement l'un des points u_j . En particulier il existe un unique indice k tel que u_k soit un sommet

de l'arête α'' . En raisonnant de même avec le point v , on voit qu'il existe un sommet v_l de l'arête α'' tel que $\{v, v_l\}$ soit une arête. De plus comme Y_2 ne contient pas de triangle, on voit que $u_k \neq v_l$, autrement dit $\alpha'' = \{u_k, v_l\}$. Ceci nous prouve la première partie de (5) (avec $\beta' = \{u, u_k\}$ et $\beta'' = \{v, v_k\}$). Soient maintenant a_k (resp. a_l) le troisième sommet du triangle dont β' (resp. β'') est une arête. Comme les deux sommets u, v de ces triangles sont liés par une arête, le raisonnement qui précède nous montre que le graphe induit sur les quatre sommets u_k, v_l, a_k, a_l est un carré. Or $\{a_k, u_k\}$, $\{u_k, v_l\}$ et $\{v_l, a_l\}$ sont des arêtes donc $\{a_k, a_l\}$ est la quatrième arête, ce qui montre que pour un indice j bien déterminé on a $(a_k, a_l) = (a'_j, a''_j)$ et ceci termine la preuve de (5). \square

Remarques et terminologie. Lorsque $s = 1$, on a $\overline{s} = 2(s - 1) = 0$ et l'étude du graphe (Λ_2, Y_2) perd tout intérêt ; on suppose donc maintenant que $s \geq 2$. D'après la propriété (4), à chaque arête α du graphe (Λ_2, Y_2) on peut associer un unique indice i , ($1 \leq i \leq s$), tel que α soit contenue dans A'_i ou dans A''_i . L'ensemble des arêtes ainsi associées à un même indice forment une partition D_i de Y_2 qu'on appelle leur *direction*. À chaque direction D_i on associe aussi la *translation* de Y_2 donnée par $t_i(u) = v$ si et seulement si $\{u, v\}$ est une arête de direction D_i . Enfin nous dirons qu'une partie S de Y_2 est *saturée* si elle est stable par toute translation dont la direction est celle d'une arête contenue dans S . Ainsi, par exemple, toute arête est une partie saturée et la proposition 7 nous montre que les carrés sont des parties saturées de (Λ_2, Y_2) . En reprenant ses notations on peut préciser la structure du graphe (Λ_2, Y_2) :

Lemme 2 *Choisissons deux indices i et j entre 1 et s .*

- (a) *Le groupe T des permutations de Y_2 engendré par les translations t_1, \dots, t_s est abélien 2-élémentaire, et opère régulièrement sur Y_2 .*
- (b) *Il est de rang $r \geq s - 1$, et s'il est de rang $s - 1$ alors $t_s = t_1 \circ \dots \circ t_{s-1}$.*
- (c) *On a $(t, s, \overline{s}) \in \{(1, 1, 0), (1, 2, 2), (1, 3, 4), (1, 5, 8)\}$*

Démonstration

- (a) Considérons t_i et t_j deux translations de directions D_i et D_j distinctes, u un point de Y_2 et les arêtes

$$\alpha'_i = \{u, t_i(u)\}, \alpha''_i = \{t_j(u), t_i t_j(u)\}, \beta'_j = \{u, t_j(u)\}, \beta''_j = \{t_i(u), t_j t_i(u)\}.$$

Les arêtes α'_i et α''_i ont même direction, mais ne sont pas simultanément dans A'_i ou dans A''_i , sinon l'arête β'_j serait elle même contenue dans A'_i ou A''_i , ce qui contredirait (4). La propriété (5) nous montre donc l'existence d'une unique arête β'' de même direction que β'_j telle que les quatre arêtes α'_i , α''_i , β'_j et β'' forment un carré. Or ceci implique clairement que $\beta''_j = \beta''$, puis que $t_i \circ t_j(u) = t_j \circ t_i(u)$. Cet argument s'appliquant à tout point u de Y_2 , on en déduit que $t_i \circ t_j = t_j \circ t_i$. Le groupe T , qui est donc commutatif et engendré par des involutions, est 2-élémentaire. Enfin la condition (5) de la proposition 7 nous montre que T opère transitivement sur Y_2 , mais aussi régulièrement

puisqu'il est commutatif.

(b) Soit r le rang de T et, quitte à renommer les translations t_1, \dots, t_s , on suppose que t_1, \dots, t_r est un système générateur minimal de T . On se donne un point u dans Y_2 et à chaque arête α_i d'origine u et de direction D_i on associe le coefficient $\varepsilon_i = \varepsilon_i(u)$ qui vaut 1 si l'arête α_i est contenue dans A'_i et -1 si elle est dans A''_i . On note $\varepsilon(u) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)$.

Compte tenu de la description des carrés donnée dans la proposition 8, (5), on vérifie que la translation de vecteur t_j , ($1 \leq j \leq s$), transforme le point u en une image $t_j(u)$ associée au s -uplet $\varepsilon(t_j(u)) = (-\varepsilon_1, \dots, -\varepsilon_{j-1}, \varepsilon_j, -\varepsilon_{j+1}, \dots, -\varepsilon_s)$.

Choisissons un indice $j > r$ et supposons, quitte à modifier l'ordre des générateurs t_1, \dots, t_r de T , que pour un entier k compris entre 2 et r on ait $t_j = t_1 \circ \dots \circ t_k$.

En évaluant de deux façons $\varepsilon(t_j(u))$ il vient

$$(-\varepsilon_1, \dots, -\varepsilon_{j-1}, \varepsilon_j, -\varepsilon_{j+1}, \dots, -\varepsilon_s) = ((-1)^{k-1}\varepsilon_1, \dots, (-1)^{k-1}\varepsilon_k, (-1)^k\varepsilon_{k+1}, \dots, (-1)^k\varepsilon_s)$$

Mais alors en utilisant les inégalités $2 \leq k \leq r < j \leq s$, on voit successivement que k est pair, $j = s$ (donc la dernière égalité " impossible " $-\varepsilon_s = (-1)^k\varepsilon_s$ n'a pas lieu), $s = r + 1$ puisque $j > r$ implique $j = s$ et enfin $k = r$, ce qui prouve (2).

(c) Le groupe T , de rang r , opérant régulièrement sur Y_2 qui est de cardinal $2\bar{s} = 4(s-1)$, on a $2^r = 2\bar{s} = 4.(s-1)$ et $s-1 \leq r \leq s$ d'après ce qui précède. Donc s doit vérifier l'une des deux équations $2^s = 4.(s-1)$ ou $2^{s-1} = 4.(s-1)$. La première conduit aux solutions $(1, 2, 2)$ et $(1, 3, 4)$, la deuxième conduit à la solution $(1, 5, 8)$. Enfin la solution $(1, 1, 0)$ est particulière puisqu'elle correspond au cas où Y_2 est vide ; dans ce cas le graphe (Λ, Y) est un triangle. \square

Venons en à la synthèse : le théorème 2 nous montre que les renseignements obtenus sur le graphe (Λ_2, Y_2) dans le lemme 2 sont suffisant pour établir l'existence et l'unicité des graphes ayant ces propriétés.

Théorème 3

1. Lorsque $t = 1$, il existe, à isomorphisme près, quatre graphes (Λ, Y) extensibles. Leurs paramètres (t, s, \bar{s}) sont :

$$(1, 1, 0), \quad (1, 2, 2), \quad (1, 3, 4), \quad (1, 5, 8)$$

2.a. Si $(t, s, \bar{s}) = (1, 1, 0)$, on a $|Y| = 1 + 2s + 2\bar{s} = 13$, et $|X| = |Y| + 1 = 4$. Le graphe (Λ, Y) est un triangle. Le groupe $\text{Aut}(\Lambda, Y)$ est isomorphe à \mathcal{S}_3 et le groupe $G(\Gamma)$ est isomorphe à \mathcal{S}_4 .

2.b. Si $(t, s, \bar{s}) = (1, 2, 2)$, on a $|Y| = 9$ et $|X| = |Y| + 1 = 10$.

Le groupe $\text{Aut}(\Lambda_2, Y_2)$ est semblable au groupe C des isométries d'un carré, donc d'ordre $|C| = 8$, et le groupe $\text{Aut}(\Lambda, Y)$ étant transitif sur Y il est d'ordre $9 \cdot |C| = 72$. Enfin le groupe $G(\Gamma)$, doublement transitif sur X , est d'ordre $10 \cdot 72 = 720$.

2.c. Si $(t, s, \bar{s}) = (1, 3, 4)$, on a $|Y| = 15$ et $|X| = |Y| + 1 = 16$.

Le groupe $\text{Aut}(\Lambda_2, Y_2)$ est semblable au groupe C des isométries d'un cube, donc d'ordre $|C| = 48$, et le groupe $\text{Aut}(\Lambda, Y)$ étant transitif sur Y , il est

d'ordre $15 \cdot |C| = 720$. Enfin le groupe $G(\Gamma)$, doublement transitif sur X , est d'ordre $16 \cdot 720 = 11520$.

2.d. Si $(t, s, \bar{s}) = (1, 5, 8)$, on a $|Y| = 27$ et $|X| = |Y| + 1 = 28$.

Le groupe $\text{Aut}(\Lambda_2, Y_2)$ est semblable au groupe H des isométries d'un hypercube en dimension 4 complété par ses diagonales principales, donc d'ordre $|H| = 2^4 \cdot 5! = 1920$, et le groupe $\text{Aut}(\Lambda, Y)$ étant transitif sur Y , il est d'ordre $27 \cdot |H| = 51840$. Enfin le groupe $G(\Gamma)$, doublement transitif sur X , est d'ordre $28 \cdot 51840 = 1451520$. Il est semblable à la représentation de degré 28 du groupe simple $S_6(2) = \text{PSp}_6(2)$.

Démonstration

Le principe est assez simple. L'analyse précédente nous a montré que, pour tout point y d'un graphe extensible (Λ, Y) de paramètres (t, s, \bar{s}) , le graphe (Λ_2, Y_2) induit par (Λ, Y) sur $Y_2 = \Lambda(y, 2)$ satisfait aux conditions de la proposition 7 et du lemme 2. Donc, si inversement, ces conditions nous permettent de construire le graphe (Λ, Y) , à isomorphisme près, on en déduira déjà l'existence et l'unicité du graphe (Λ, Y) de paramètres (t, s, \bar{s}) , mais aussi la transitivité sur Y du groupe de ses automorphismes $\text{Aut}(\Lambda)$. En utilisant alors la proposition 5, on voit que les localisés du graphe initial (Γ, X) en des points distincts de X sont isomorphes et on en déduit la double transiivité de l'action de $G = \text{Aut}(\Gamma, X)$ sur X en utilisant par exemple la proposition 4.

* $s = 1$. Ce cas est trivial. On a $Y_2 = \emptyset$ et le graphe (Λ, Y) est un triangle. Donc le groupe $\text{Aut}(\Gamma, X)$ est le groupe \mathcal{S}_4 agissant naturellement sur X .

* *Autres cas.* Pour montrer l'unicité de ces graphes (à isomorphisme près) on utilise deux remarques :

** Le nombre s étant donné, ainsi que $\bar{s} = 2(s - 1)$, dans chaque cas le cardinal de Y_2 est une puissance de 2 et il n'existe qu'une représentation régulière d'un groupe T , 2-élémentaire sur Y_2 . Par ailleurs si t_1, \dots, t_r est un système générateur minimal de T , le lemme 2 nous montre que les arêtes du graphe (Λ_2, Y_2) sont les orbites sur Y_2 de chacune des t_i ($1 \leq i \leq r$), et éventuellement de la translation $t_s = t_1 \circ \dots \circ t_{s-1}$ lorsque le rang r de T est $s - 1$ (c'est-à-dire si $s = 5$). Ceci prouve que les liaisons internes au graphe (Λ_2, Y_2) sont entièrement déterminées par la connaissance de l'action de T sur Y_2 .

** Pour déterminer complètement le graphe (Λ, Y) il nous suffit donc de reconstruire les liaisons entre (Λ_2, Y_2) et (Λ_1, Y_1) et les liaisons internes à (Λ_1, Y_1) . Or les conditions (1) et (2) de la proposition 7, nous montrent que l'ensemble $\{a'_1, a''_1, \dots, a'_s, a''_s\}$ des points de Y_1 est en bijection naturelle avec l'ensemble des parties $\{A'_1, A''_1, \dots, A'_s, A''_s\}$ de Y_2 associées aux translations t_i . Il nous suffit donc de montrer que la représentation du groupe T sur Y_2 détermine toutes les partitions de Y_2 en $\{A'_i, A''_i\}$ pour en déduire l'unicité du graphe (Λ, Y) . Or, pour un indice i et un point u de Y_2 donnés dans A'_i , la condition (5) de la proposition 7 nous montre que chaque point $t_j(u)$ pour $j \neq i$ est dans A''_i ainsi que les points $t_i \circ t_j(u)$ ce qui nous donne les $\bar{s} = 2(s - 1)$ points de A''_i . Ceux de A'_i sont obtenus par exemple, par complémentarité. Ceci achève la preuve de l'unicité.

L'existence se démontre facilement par dénombrement puisqu'on peut représenter "à la main" les différents graphes Y_2 :

- * Si $(t, s, \bar{s}) = (1, 2, 2)$, (Λ_2, Y_2) est un carré.
- * Si $(t, s, \bar{s}) = (1, 3, 4)$, (Λ_2, Y_2) est un cube.
- * Si $(t, s, \bar{s}) = (1, 5, 8)$, (Λ_2, Y_2) est un hypercube en dimension 4 auquel on rajoute ses diagonales principales.

Venons en à la détermination des groupes d'automorphismes de ces graphes. On ne revient pas sur le cas $s = 1$.

Si $(t, s, \bar{s}) = (1, 2, 2)$. On a $|Y| = 1 + 2s + 2\bar{s} = 9$ et $|X| = |Y| + 1 = 10$.

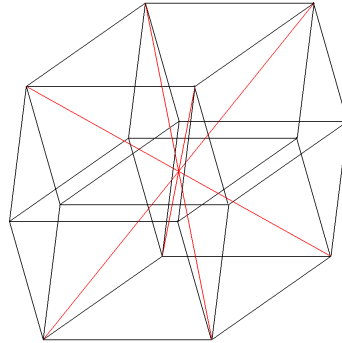
Le groupe $\text{Aut}(\Lambda_2, Y_2)$ est, par construction, isomorphe au groupe diédral D_4 des automorphismes d'un carré et le groupe $\text{Aut}(\Lambda, Y)$ étant transitif sur Y il est d'ordre $9 \cdot |D_4| = 72$. Enfin le groupe $\text{Aut}(\Gamma, X)$ est à son tour transitif sur X , donc doublement transitif, et d'ordre $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Si $(t, s, \bar{s}) = (1, 3, 4)$. On a $|Y| = 1 + 2s + 2\bar{s} = 15$ et $|X| = |Y| + 1 = 16$.

Le groupe $\text{Aut}(\Lambda_2, Y_2)$ est, par construction, isomorphe au groupe C des isométries d'un cube d'ordre $|C| = 48$, et le groupe $\text{Aut}(\Lambda, Y)$ étant transitif sur Y il est d'ordre $15 \cdot |C| = 720$. Enfin le groupe $\text{Aut}(\Gamma, X)$ est à son tour transitif sur X , donc doublement transitif, et d'ordre $16 \cdot 720 = 11520$.

Si $(t, s, \bar{s}) = (1, 5, 8)$. On a $|Y| = 1 + 2s + 2\bar{s} = 27$ et $|X| = |Y| + 1 = 28$.

Le groupe $\text{Aut}(\Lambda_2, Y_2)$ est, par construction, isomorphe au groupe H des isométries d'un hypercube en dimension 4 complété par ses diagonales principales d'ordre $|H| = 2^4 \cdot 5! = 1920$, et le groupe $\text{Aut}(\Lambda, Y)$ étant transitif sur Y il est d'ordre $27 \cdot |H| = 51840$. Enfin le groupe $\text{Aut}(\Gamma, X)$ est à son tour transitif sur X , donc doublement transitif, et d'ordre $28 \cdot 51840 = 1451520$, tout comme la représentation de degré 28 du groupe $S_6(2) = \text{PSp}_6(2)$, ce qui permet de l'identifier. \square



L'hypercube et ses diagonales principales

3.4 Les graphes de Paley $P(q)$ où $q = 4t + 5$

Rappelons que si les paramètres du graphe (Λ, Y) sont (t, s, \bar{s}) , ceux de son graphe complémentaire $(\bar{\Lambda}, Y)$ sont (\bar{t}, \bar{s}, s) où $t + \bar{t} = s + \bar{s} - 2$. On peut donc se contenter de rechercher l'un des deux graphes (Λ, Y) ou $(\bar{\Lambda}, Y)$. Cette remarque

nous pousse aussi à regarder en priorité les graphes susceptibles d'être isomorphes à leur complémentaire, autrement dit pour lesquels $(\bar{t}, \bar{s}, s) = (t, s, \bar{s})$. On a alors $s = \bar{s} = 2s - t - 1$, donc $s = \bar{s} = t + 1$. Or lorsque de plus $q = 4t + 5$ est une puissance d'un nombre premier p il existe effectivement un graphe fortement régulier avec ces paramètres : le graphe de Paley $P(q)$ ([?]). On en donne ci-dessous une construction montrant que ce graphe est extensible.

On choisit un entier naturel t tel que $q = 4t + 5$ soit une puissance d'un nombre premier p , et on pose $s = \bar{s} = t + 1$. Soit F_q le corps fini à q éléments, $V = F_q \times F_q$ et $X = \mathbb{P}(V)$ la droite projective associée qui est de cardinal $q + 1 = 4t + 6$. Notons aussi i une racine primitive quatrième de 1 dans F_q , C l'ensemble des carrés non nuls et \bar{C} l'ensemble des non-carrés dans F_q . Enfin pour tout scalaire λ , on pose $\lambda + C = \{\lambda + c \mid c \in C\}$.

Lemme 3

1. $|C| = |\bar{C}| = (q - 1)/2 = 2s$.
2. Si λ est un carré non nul alors $|(\lambda + C) \cap C| = s - 1$ et $|(\lambda + C) \cap \bar{C}| = s$.
3. Si μ n'est pas un carré alors $|(\mu + C) \cap C| = s$ et $|(\mu + C) \cap \bar{C}| = s$.

Démonstration

1. La première affirmation est claire puisque l'application $x \rightarrow x^2$ de F_q^* dans lui même est un morphisme d'image C et de noyau $\{\pm 1\}$.
2. Pour montrer ces égalités, on remarque tout d'abord que la multiplication par un carré non nul λ induit une bijection de $(1 + C) \cap C$ sur $(\lambda + C) \cap C$ et de $(1 + C) \cap \bar{C}$ sur $(\lambda + C) \cap \bar{C}$, donc il nous suffit de les établir lorsque $\lambda = 1$. Recherchons le cardinal de l'ensemble B des carrés non nuls b^2 aussi dans $1 + C$. Dans le plan projectif, la conique projective d'équation $x^2 + y^2 = z^2$ comporte exactement $q + 1$ points (voir [13] par exemple) dont 6 exactement ont une composante nulle, à savoir $\langle(0, 1, 1)\rangle, \langle(0, 1, -1)\rangle, \langle(1, 0, 1)\rangle, \langle(1, 0, -1)\rangle, \langle(1, i, 0)\rangle$ et $\langle(1, -i, 0)\rangle$. L'ensemble des $q - 5$ points restant se projette surjectivement sur l'ensemble des carrés b^2 recherchés (par $\langle(x, y, z)\rangle \rightarrow z^2/x^2$), et chaque carré b^2 possède exactement quatre antécédents par cette projection qui sont $\langle(1, y, z)\rangle, \langle(1, -y, z)\rangle, \langle(1, y, -z)\rangle, \langle(1, -y, -z)\rangle$. On en déduit donc que le nombre des carrés b^2 qui sont aussi dans $1 + C$ est $(q - 5)/4 = s - 1$. La deuxième égalité s'en déduit facilement en remarquant que $\{C, \bar{C}\}$ est une partition de F_q^* , que $|C| = |\bar{C}| = |\lambda + C| = 2s$ et que $0 \in (\lambda + C)$ (car (-1) est un carré). On en tire $|(\lambda + C) \cap (C \cup \bar{C})| = 2s - 1$ et $|(\lambda + C) \cap \bar{C}| = (2p - 1) - (p - 1) = p$.
3. Remarquant que la multiplication par un non-carré μ échange les ensembles C et \bar{C} , on en déduit que $|(\mu + \bar{C}) \cap C| = |(\mu^2 + C) \cap \bar{C}| = p$, puis par translation $|\bar{C} \cap (\mu + C)| = p$, enfin comme $\{C, \bar{C}\}$ est une partition de F_q^* et $(\mu + C) \subset F_q^*$, il vient $|C \cap (\mu + C)| = 2p - p = p$. \square

Donnons nous une base rangée (u, v) de V et l'application $\theta : \lambda \rightarrow \langle \lambda.u + v \rangle$ de F_q dans l'ensemble $X^u = \mathbb{P}(V) - \{\langle u \rangle\}$. Comme θ est clairement bijective

on peut associer à la base (u, v) un graphe Γ_v^u sur X^u donné par ses arêtes : deux points $\langle \alpha.u + v \rangle$ et $\langle \beta.u + v \rangle$ sont liés si et seulement si $\alpha - \beta \in C$, ce qu'on note aussi

$$\langle \alpha.u + v \rangle \sim \langle \beta.u + v \rangle \iff \alpha - \beta \in C$$

(comme (-1) est un carré cette liaison est symétrique).

Remarque. On voit qu'en particulier le point $x = \langle \alpha.u + v \rangle$ est lié à $\langle v \rangle$ si et seulement si $\alpha \in C$, mais aussi que deux points $x = \langle \alpha.u + v \rangle$ et $y = \langle \beta.u + v \rangle$ sont simultanément liés ou non liés à $\langle v \rangle$ si et seulement si $\alpha\beta \in C$.

Le théorème 3 nous montre que les graphes (Γ_v^u, X^u) , et nous décrit leur groupe d'automorphismes ainsi que le groupe G des permutations de X qui permutent les graphes (Γ_v^u, X^u) .

Théorème 4

On choisit une base (u, v) de V .

1. Le diamètre du graphe Γ_v^u est 2. Pour deux points x et y dans X^u on a
 - * Si $d(x, y) = 0$ alors $\Gamma_v^u(x, 1) = \Gamma_v^u(y, 1)$ est de cardinal $(q - 1)/2 = 2s$.
 - * Si $d(x, y) = 1$ alors $\Gamma_v^u(x, 1) \cap \Gamma_v^u(y, 1)$ est de cardinal $t = s - 1$.
 - * Si $d(x, y) = 2$ alors $\Gamma_v^u(x, 1) \cap \Gamma_v^u(y, 1)$ est de cardinal s .
 2. Le graphe Γ_u^v est le localisé en $\langle v \rangle$ de Γ_v^u .
 - 3.a. Pour tout automorphisme $\varphi \in GL_2(q)$ le graphe $\Gamma_{\varphi(v)}^{\varphi(u)}$ sur $X^{\varphi(u)}$ est l'image par φ du graphe Γ_v^u sur X^u : $\varphi(\Gamma_v^u) = \Gamma_{\varphi(v)}^{\varphi(u)}$.
 - 3.b. Supposons de plus que φ stabilise la droite $\langle u \rangle$.
- Si le déterminant $\det(\varphi)$ est un carré dans le corps F_q , alors $\Gamma_{\varphi(v)}^{\varphi(u)} = \Gamma_v^u$.
- Sinon, le graphe $\Gamma_{\varphi(v)}^{\varphi(u)}$ est le graphe complémentaire $\overline{\Gamma}_v^u$ de Γ_v^u sur X^u .
4. Le groupe $SL_2(V)$ possède deux orbites sur l'ensemble des graphes Γ_v^u . L'orbite de l'un d'eux est l'ensemble de ses localisés en tous les points de $X = \mathbb{P}(V)$.

Démonstration

1. Posons $x = \langle \alpha.u + v \rangle$, $y = \langle \beta.u + v \rangle$, $z = \langle \gamma.u + v \rangle$ et cherchons à quelle condition z est simultanément lié à x et y . On a

$$x \sim z \text{ et } y \sim z \iff \gamma - \alpha \in C \text{ et } \gamma - \beta \in C \iff \gamma \in (\alpha + C) \cap (\beta + C)$$

Or par translation $|((\alpha + C) \cap (\beta + C))| = |(\alpha - \beta) + C \cap C|$. Utilisons le lemme 4.

* Si $x = y$ alors $\alpha = \beta$ et il vient $|\Gamma_v^u(x, 1)| = |\Gamma_v^u(y, 1)| = |C| = 2s$.

* Si x et y sont liés, alors $\alpha - \beta$ est un carré non nul et d'après le lemme 4 $|((\alpha - \beta) + C) \cap C| = s - 1$. Il vient donc $|\Gamma_v^u(x, 1)| = |\Gamma_v^u(y, 1)| = s - 1$.

* Enfin si x et y ne sont pas liés alors $\alpha - \beta \in \overline{C}$, et $|((\alpha - \beta) + C) \cap C| = s > 0$. On en déduit que x et y sont à distance 2 et que $|\Gamma_v^u(x, 1)| = |\Gamma_v^u(y, 1)| = s$.

2. Comparons les arêtes des graphes Γ_u^v et de Γ_v^u .

Soient $x = \langle \alpha.u + v \rangle$ et $y = \langle \beta.u + v \rangle$ deux points de Γ_v^u distincts de $\langle u \rangle$ et $\langle v \rangle$ (donc $\alpha\beta \neq 0$).

Dans le graphe Γ_v^u on a : $x = \langle \alpha.u + v \rangle \sim \langle v \rangle \iff \alpha \in C$,

et dans le graphe Γ_u^v on a : $x = \langle u + (1/\alpha)v \rangle \sim \langle u \rangle \iff 1/\alpha \in C$.

Donc les points à distance 1 (resp. 2) de $\langle v \rangle$ dans Γ_v^u sont les mêmes que les points à distance 1 (resp. 2) de $\langle u \rangle$ dans Γ_u^v .

Par ailleurs x et y sont liés dans le graphe Γ_v^u si et seulement si $\alpha - \beta \in C$, tandis qu'ils sont liés dans le graphe Γ_u^v si et seulement si $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta} \in C$.

Donc les liaisons entre x et y sont conservées si $\alpha\beta \in C$ et inversées dans le cas contraire. Mais d'après la remarque qui précède le théorème 3 cela signifie que la liaison entre deux points x et y est inversée ($x \sim y \iff x \not\sim y$) si et seulement si x et y ne sont pas à la même distance de $\langle v \rangle$ (ou $\langle u \rangle$). Or ceci signifie précisément que Γ_u^v est le localisé de Γ_v^u (voir le paragraphe 2.2).

3.a. Chaque élément φ de $GL_2(V)$ agit naturellement sur l'ensemble des points $\langle w \rangle$ de $X = \mathbb{P}(V)$ par $\varphi(\langle w \rangle) = \langle \varphi(w) \rangle$, et en particulier $\varphi(\langle \alpha.u + v \rangle) = \langle \alpha.\varphi(u) + \varphi(v) \rangle$, donc deux points $x = \langle \alpha.u + v \rangle$ et $y = \langle \beta.u + v \rangle$ de X^u sont liés dans le graphe Γ_v^u si et seulement si leurs images $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$ le sont dans le graphe $\Gamma_{\varphi(v)}^{\varphi(u)}$.

3.b. Les graphes Γ_v^u et $\Gamma_{\varphi(v)}^{\varphi(u)}$ ont même ensemble de sommets puisque $X^u = X^{\varphi(u)}$. L'image de la base (u, v) par φ est de la forme $(a.u, w = b.u + c.v)$ où $ac \neq 0$, donc choissant deux points $x = \langle \alpha a.u + w \rangle$ et $y = \langle \beta a.u + w \rangle$ de X^u , on voit qu'ils sont liés dans le graphe $\Gamma_{\varphi(v)}^{\varphi(u)}$ si et seulement si $\alpha - \beta \in C$, tandis qu'en les ré-écrivant $x = \langle (\frac{\alpha a + b}{c}.u + v) \rangle$ et $y = \langle (\frac{\beta a + b}{c}.u + v) \rangle$ on voit qu'ils sont liés dans le graphe Γ_v^u si et seulement si $(\alpha - \beta)a/c \in C$. Ainsi les liaisons des graphes Γ_v^u et $\Gamma_{\varphi(v)}^{\varphi(u)}$ sont toutes identiques lorsque $a/c \in C$ et toutes différentes lorsque $a/c \in \overline{C}$. Comme $\det \varphi = (a/c).c^2$, le résultat en découle.

4. D'après 3a le groupe $PGL_2(V)$ opère transitivement sur l'ensemble Γ des graphes Γ_v^u . Donc, comme le groupe $PSL_2(V)$ est d'indice 2 dans $PGL_2(V)$, soit il est lui même transitif sur Γ , soit il y possède deux orbites. Mais prenant l'un des graphes Γ_v^u , on voit qu'il n'existe aucun élément φ de $SL_2(V)$ tel que $\varphi(\Gamma_v^u) = \Gamma_{\varphi(v)}^{\varphi(u)} = \overline{\Gamma}_v^u$, car cela impliquerait tout d'abord que φ stabilise la droite vectorielle $\langle u \rangle$ puis, grâce à 3a., que $\Gamma_{\varphi(v)}^{\varphi(u)} = \Gamma_v^u = \overline{\Gamma}_v^u$. Donc $SL_2(V)$ possède deux orbites sur Γ , et pour terminer il nous faut montrer que tout localisé d'un graphe Γ_v^u est dans l'orbite de Γ_v^u sous l'action de $SL_2(V)$. Mais ceci vient du fait (vu en 2) que le localisé de Γ_v^u en $\langle v \rangle$ est Γ_u^v et que le morphisme φ qui envoie la base (u, v) sur la base (v, u) admet pour déterminant (-1) qui est un carré dans F_q . \square

4 Représentations réduites des graphes

Dans cette partie on associe aux graphes précédemment calculés leurs représentations réduites. Le principe repose sur l'article ([5]) et plus particulièrement

sur ses propositions 1, 2 et le théorème 1. On y prouve que toute représentation réduite $u : X \rightarrow (E, \alpha)$ d'un graphe (Γ, X) est caractérisée par ses paramètres (ω, c) et donc par sa matrice $S(u) = S(\omega, c)$. Pour $X = \{1, \dots, n\}$, soit x_1, \dots, x_n une base orthonormée d'un espace euclidien E dont le produit scalaire est noté $\varphi = (\cdot | \cdot)$ et $x : X \rightarrow E$ la représentation triviale de Γ donnée par $x : i \rightarrow x_i$ pour tout i dans X . La forme bilinéaire sur E dont la matrice dans la base x_1, \dots, x_n est $\mathcal{E} = S(1, 1)$ est notée β ainsi que l'endomorphisme symétrique qui lui est associé par

$$\forall y, z \in E, \quad \beta(x, y) = (\beta(x)|y) = (x|\beta(y)).$$

À chaque nombre réel λ on associe la forme bilinéaire $\beta - \lambda.Id$ de matrice $S(1 - \lambda, 1)$ et de rang $n - m(\lambda)$ où $m(\lambda)$ est la multiplicité de λ comme valeur propre de $S(1, 1)$ (éventuellement nulle). Soit enfin p_λ le projecteur orthogonal de E sur l'image I_λ de $\beta - \lambda.Id$ et $E_\lambda = \ker p_\lambda$ son noyau. Le rang de $S(1 - \lambda, 1)$ étant égal à la dimension de I_λ , la représentation $u_\lambda := p_\lambda \circ x$ de Γ sur I_λ est réduite, de matrice $S(1 - \lambda, 1)$, ce qui nous donne une construction d'une représentation réduite de matrice donnée.

Pour calculer explicitement les représentations réduites des graphes étudiés dans la section 3 il nous faut bien sûr calculer les valeurs propres de la matrice $S_\Gamma(1, 1)$ de chacun d'eux. Nous allons tout d'abord établir un résultat intéressant en soi.

4.1 Nombre de valeurs propres de la matrice $\mathcal{E} = S(1, 1)$

Proposition 8

Soit (Γ, X) un graphe de matrice $\mathcal{E} = S(1, 1)$.

Si le groupe $G(\Gamma)$ opère deux fois transitivement sur l'ensemble X , alors la matrice $S(1, 1)$ possède au plus deux valeurs propres distinctes.

Démonstration. On garde les notations ci-dessus. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres de $S(1, 1)$. L'espace E est une somme orthogonale des sous-espaces propres $E_t := E_{\lambda_t}$ de la forme β de matrice $S(1, 1)$ ($1 \leq t \leq s$) :

$$E = E_1 \oplus \dots \oplus E_s$$

Par définition du groupe $G = G(\Gamma)$, si σ est dans G , il existe une suite de coefficients ν_1, \dots, ν_n dans $\{-1, +1\}$ tels que

$$(3) \quad \forall (i, j) \in X \times X, \quad \varepsilon_{\sigma(i), \sigma(j)} = \nu_i \nu_j \cdot \varepsilon_{i, j},$$

ce qui nous permet d'associer à σ une β -isométrie f_σ de E en posant

$$\forall i \in X, \quad f_\sigma(x_i) = \nu_i \cdot x_{\sigma(i)}.$$

Mais f_σ est aussi une φ -isométrie de E puisque l'image par f_σ de (x_1, \dots, x_n) est une base orthonormée de (E, φ) . On en déduit donc que pour deux points y et z quelconques de E on a

$$(f_\sigma \circ \beta(y)|z) = (\beta(y)|f_\sigma^{-1}(z)) = \beta(y, f_\sigma^{-1}(z)) = \beta(f_\sigma(y), z) = (\beta \circ f_\sigma(y), z).$$

Par conséquent $f_\sigma \circ \beta = \beta \circ f_\sigma$. On en déduit que les sous-espaces propres E_t de β sont stables par l'isométrie f_σ , et si, pour tout vecteur y et tout indice t entre 1 et s , on note $q_t(y) := y^t$ la projection orthogonale de y sur E_t , on a

$$\forall y \in E, \quad f_\sigma(q_t(y)) = q_t(f_\sigma(y)).$$

Montrons que l'application $u_t := q_t \circ x : X \rightarrow E_t$ est une représentation de X . Prenons quatre points i, j, k, l de X tels que $i \neq j$ et $k \neq l$. Le groupe G opérant doublement transitivement sur X , il existe une permutation σ de X telle que $\sigma(i) = k$ et $\sigma(j) = l$. Définissons des constantes c_t et ω_t par les égalités

$$(x_i^t | x_j^t) = \varepsilon_{i,j} c_t \quad \text{et} \quad (x_i^t | x_i^t) = \omega_t.$$

Il vient en remarquant que $\varepsilon_{k,l} = \varepsilon_{\sigma(i),\sigma(j)} = \nu_i \nu_j \cdot \varepsilon_{i,j}$,

$$(x_k^t | x_l^t) = (\nu_i \cdot f_\sigma(x_i^t) | \nu_j \cdot f_\sigma(x_j^t)) = \nu_i \nu_j (x_i^t | x_j^t) = \nu_i \nu_j \varepsilon_{i,j} c_t = \varepsilon_{k,l} c_t.$$

Par conséquent la constante c_t est indépendante du couple d'indices distincts (i, j) . Un raisonnement similaire montre que la constante ω_t ne dépend pas de l'indice i et ceci montre que l'application $u_t := q_t \circ x : X \rightarrow E_t$ est une représentation de X sur E_t , de matrice $S(\omega_t, c_t)$. On a rappelé plus haut que les représentations réduites de Γ sont de degré $r_t = n - m(\lambda_t)$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ désignent les valeurs propres de la matrice $S(1, 1)$. Par ailleurs, d'après la proposition 2 de ([5]) toute représentation d'un graphe est somme d'une représentation nulle et d'une représentation réduite. La dimension $m(\lambda_t)$ de chaque sous-espace propre E_t de $S(1, 1)$ doit donc être supérieure ou égale à l'un des nombres $r_j = n - m(\lambda_j)$. Comme $n = m(\lambda_1) + \dots + m(\lambda_s)$ on ne peut qu'avoir pour tout t , $m(\lambda_t) \geq n - m(\lambda_t)$. En additionnant ces inégalités il vient $n \geq s \cdot n - n$ donc $1 \geq s - 1$ soit encore $2 \geq s$ comme attendu. \square

Remarque. Lorsque $\lambda \neq 1$ les représentations de matrices $S(1 - \lambda, 1)$ et $S(1, 1/(1 - \lambda))$ sont homothétiquement semblables et le coefficient $c = 1/(1 - \lambda)$ est géométriquement intéressant puisqu'il représente le cosinus de l'angle commun de deux droites dans la gerbe de la représentation.

4.2 Application aux graphes

Dans la section 3 nous avons obtenu différents graphes extensibles (Γ^x, X^x) , de paramètres (t, s, \bar{s}) . Chacun d'eux est le localisé d'un graphe (Γ, X) dont les représentations réduites rang $r < n = |X|$ sont associées, d'après ce qui précède, soit à la matrice $S(0, 1)$ lorsqu'elle est singulière, soit aux racines du polynôme $\chi(x) = \det(S(1, x))$. En utilisant Maple, on constate que parmi ces exemples, aucune des matrices $S(0, 1)$ n'est singulière. On calcule alors dans chaque cas le polynôme $\chi(x) = \det(S(1, x))$.

* Graphe $(\Gamma^x, X^x) : (t, s, \bar{s}) = (0, 1, 1)$. On a $|X| = 2 + 2s + 2\bar{s} = 6$,

$$\chi(c) = -(5c^2 - 1)^3 \quad \text{et} \quad \cos \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Le graphe (Γ, X) admet donc une représentation u dans un espace euclidien E de dimension 3. La gerbe de droites $\mathcal{G}(u) = \{\langle u_1 \rangle, \dots, \langle u_6 \rangle\}$ compte six droites formant deux à deux un angle θ dont le cosinus vaut $\pm 1/\sqrt{5}$. On reconnaît ici les six axes passant par les centres des faces opposées d'un dodécaèdre. Le groupe d'automorphisme $G(u)$ est semblable au groupe alterné A_5 agissant doublement transitivement sur un ensemble de cardinal 6.

* Graphe $(\Gamma^x, X^x) : (t, s, \bar{s}) = (1, 1, 0)$. On a $|X| = 2 + 2s + 2\bar{s} = 4$

$$\chi(c) = -(3c - 1)(c + 1)^3 \quad \text{et} \quad \cos \theta = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad \cos \theta = -1$$

Le graphe $({}^x\Gamma, {}^xX)$ est un "triangle pointé", c'est-à-dire un triangle auquel on a rajouté un point isolé. C'est aussi le localisé en x d'un tétraèdre. Il admet deux représentations réduites correspondant à ces deux présentations. La première est donnée par la gerbe des quatre droites joignant le centre d'un tétraèdre régulier à ses sommets ($\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$). La seconde ($\cos \theta = -1$) envoie les trois sommets du triangle de $({}^x\Gamma, {}^xX)$ sur le point 1 de l'axe réel et le point isolé x sur -1 .

* Graphe $(\Gamma^x, X^x) : (t, s, \bar{s}) = (1, 3, 4)$. On a $|X| = 2 + 2s + 2\bar{s} = 16$

$$\chi(c) = (5c + 1)^6(3c - 1)^{10} \quad \text{et} \quad \cos \theta = -\frac{1}{5} \quad \text{ou} \quad \cos \theta = \frac{1}{3}$$

Le graphe (Γ, X) admet deux représentations réduites de degré < 16 sur une gerbe isométrique de 16 droites. L'une dans un espace euclidien de dimension 6, les droites faisant deux à deux un angle θ tel que $\cos \theta = 1/3$, l'autre dans un espace euclidien de dimension 10, les droites faisant deux à deux un angle θ tel que $\cos \theta = -1/5$.

Le groupe $G(u)$ des isométries stabilisant ces gerbes de droites est semblable au groupe $G(\Gamma)$ agissant sur X . Il est d'ordre 11520 et opère deux fois transitivement sur la gerbe $\mathcal{G}(u)$.

* Graphe $(\Gamma^x, X^x) : (t, s, \bar{s}) = (1, 5, 8)$. On a $|X| = 2 + 2s + 2\bar{s} = 28$

$$\chi(c) = -(9c + 1)^7(3c - 1)^{21} \quad \text{et} \quad \cos \theta = -\frac{1}{9} \quad \text{ou} \quad \cos \theta = \frac{1}{3}$$

Le graphe (Γ, X) admet deux représentations réduites de degré < 28 sur une gerbe isométrique de 28 droites. L'une dans un espace euclidien de dimension 7, les droites faisant deux à deux un angle θ tel que $\cos \theta = 1/3$, l'autre dans un espace euclidien de dimension 21, les droites faisant deux à deux un angle θ tel que $\cos \theta = -1/9$.

Le groupe $G(u)$ des isométries stabilisant ces gerbes de droites est semblable au groupe $G(\Gamma)$ agissant sur X . Il est d'ordre $1451520 = 2.725760$ et opère deux fois transitivement sur la gerbe $\mathcal{G}(u)$.

* Graphe $(\Gamma^x, X^x) : (t, s, \bar{s}) = (t, t+1, t+1)$. $|X| = 2 + 2s + 2\bar{s} = q + 1$.
Le graphe (Γ^x, X^x) est un graphe de Paley $P(q)$, pour $q = 4t + 5$.

$$\chi(c) = \varepsilon(c\sqrt{q} - 1)^{\frac{q+1}{2}}(c\sqrt{q} + 1)^{\frac{q+1}{2}}, \text{ où } \varepsilon = \pm 1 \text{ et } \cos \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{q}}$$

Le graphe (Γ, X) admet deux représentations réduites de degré $< q+1$ sur une gerbe isométrique de $q+1$ droites placées dans un espace de dimension $(q+1)/2$. Elles forment deux à deux un angle θ dont le cosinus vaut $\pm 1/\sqrt{q}$.

Le groupe $G(u)$ des isométries stabilisant ces gerbes de droites est semblable au groupe $PSL_2(q)$ agissant sur l'ensemble X des points de la droite projective $\mathbb{P}_1(F_q)$ qui est d'ordre $(q+1)q(q-1)/2$.

5 Prolongements

Ce travail n'est bien sûr pas fermé. Tout d'abord il reste à compléter la liste des graphes (Λ, Y) extensibles. Comme nous l'avons mentionné plus haut ce sont tous des graphes fortement réguliers dont les paramètres, habituellement notés (v, k, λ, μ) sont reliés aux notations de cet article par

$$v = n, k = 2s, \lambda = t, \mu = s.$$

Mais inversement, si les paramètres (v, k, λ, μ) d'un graphe fortement régulier (Λ, Y) satisfont à ces relations pour des entiers n, s, t convenablement choisis, est-on sûr que le graphe (Λ, Y) est extensible ?

En particulier il existe des graphes (Λ, Y) de paramètres $(t, t+1, t+1)$ (i.e. $v = 4t+5, k = 2t+2, \lambda = t, \mu = t+1$), dit "conference graphs", qui ne sont pas des graphes de Paley. Lesquels sont extensibles ? Quels groupes leurs sont associés ?

6 Bibliographie

Articles

- [1] Dominique de Caen, *Large equiangular sets of lines in Euclidean spaces*. The electronic journal of combinatorics. November 9, 2000.
- [2] L. Nguyen Van The, *On a problem of Specker about Euclidean representations of finite graphs.*, (2008)
<http://arxiv.org/abs/0810.2359>
- [3] Aidan Roy, *Minimal Euclidean representations of graphs*. (2008)
<http://arxiv.org/abs/0812.3707>

- [4] J.J. Seidel, *Discrete Non-Euclidean Geometry*, pp. 843-920 in Handbook of Incidence Geometry (F. Buckenhout, ed.), Elsevier 1995.
 - [5] L. Vienne, *Représentations linéaires des graphes finis*. (2009)
<http://arxiv.org/abs/0902.1874>.
 - [6] Blokhuis, A. *On Subsets of $GF(q^2)$ with Square Differences*. Indag. Math. 46, 369-372, (1984).
 - [7] Brouwer, A. E. ; Cohen, A. M. ; and Neumaier, A. *Conference Matrices and Paley Graphs*. In Distance Regular Graphs. New York : Springer-Verlag.
- Livres*
- [8] Godsil, Chris, and Royle, *Algebraic Graph Theory*. New York : Springer. (2001)
 - [9] Dembowski, P. *Finite geometries*. Springer-Verlag (1968)
 - [10] Norman Biggs. *Finite groups of automorphisms*. London Mathematical Society. (1970)
 - [11] Norman Biggs. *Algebraic Graph Theory*. Cambridge University Press, (1993)
 - [12] P. J. Cameron and J.H.Van Lint. *Designs, graphs, codes and their links, vol 22 of London Mathematical Society Student Texts*, Cambridge University Press, Cambridge, (1991).
 - [13] L. Vienne. *Présentation algébrique de la géométrie classique*. Vuibert. (1996).